



CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție " $*$ " astfel :

$$x * y = -xy + 2x + 2y - 2, (\forall)x, y \in \mathbf{R}.$$

- Demonstrați că legea " $*$ " este asociativă .
- Determinați $a \in \mathbf{R}$ cu proprietatea : $a * x = x * a = a, (\forall)x \in \mathbf{R}$.
- Să se calculeze: $\frac{1}{2016} * \frac{2}{2016} * \frac{3}{2016} * \dots * \frac{4032}{2016}$.

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$, care are cel puțin 3 elemente având proprietatea $ababa = a, \forall a, b \in A - \{0, 1\}$. Să se arate că:

- Inelul $(A, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero.
- Inelul $(A, +, \cdot)$ este finit și să se determine numărul de elemente ale inelului.

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de termeni generali:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \frac{1}{n+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}.$$

Să se calculeze limitele celor două șiruri. Dacă $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, să se compare cele două limite?

4. Să se calculeze $I = \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2+1} dx$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.